

G3. Le modèle mathématique de Hardy-Weinberg (sans stratégie).

Au début du 20^e siècle, le mathématicien Godfrey Hardy et le médecin Wilhelm Weinberg ont découvert un modèle mathématique qui permet de prévoir, dans certaines conditions, l'évolution des fréquences alléliques et génotypiques au sein des populations.

On veut montrer que les connaissances sur la reproduction sexuée corroborent la prédition du modèle théorique de Hardy-Weinberg, en construisant un modèle numérique de suivi de deux allèles d'un gène dans une population.

Pour répondre à la problématique, on vous demande :

- de **modéliser** l'évolution des fréquences alléliques et génotypiques ;
- de **présenter** et de **traiter** vos résultats pour **répondre** à la problématique.

Ressources complémentaires

Matériel :

- Logiciel Edu'Modèles algorithmique multi-agents en ligne, disponible sur le site de l'académie de Nice pour la création du modèle numérique et pour la réalisation des simulations
- Logiciel tableur pour le traitement des résultats des simulations

Dans Edu'modèles, la modélisation multi-agents se focalise sur des éléments actifs, les entités, dont le comportement est défini par des équations connues où les entités réactives forment des entités produites, comme pour le déroulement d'une réaction chimique.

Travail préparatoire :

- On considère, dans une population, un gène représenté par deux allèles (notés A1 et A2).
- Il faut prévoir les entités à déclarer dans le modèle. Il s'agit ici des différentes sortes de génotypes donc de combinaisons des deux allèles.
- Pour calculer l'évolution au cours du temps des effectifs des génotypes des différents individus, le modèle doit comporter des équations matérialisant toutes les possibilités de reproduction entre les individus. Il doit aussi tenir compte des proportions des descendants obtenus.

On vous demande de bâtir le tableau (à ne pas confondre avec un échiquier de croisement) qui permet de préparer la modélisation. Pour le construire :

- **Indiquer** en ligne et en colonne les génotypes possibles pour les deux géniteurs ;
- **Rayer** les cases redondantes ;
- **Noter** à l'intersection ligne/colonne les génotypes des descendants obtenus (pour chaque reproduction, se limiter à l'obtention de quatre individus en respectant leurs proportions).

Document 1. Tableau à remplir

Génotype du parent mâle Génotype du parent femelle	(A1A1)		
(A1A1)			

Document 2. Rappel sur l'équilibre de Hardy-Weinberg.

En 1908, Hardy et Weinberg proposent un modèle théorique qui prévoit, sous certaines conditions, la stabilité des fréquences relatives des allèles dans les populations eucaryotes à reproduction sexuée. Les conditions sont : pas de sélection naturelle, pas de mutation, pas de migration, pas de dérive génétique (gros effectif), des couples qui se forment au hasard.

La modélisation :

Document 3. Travail : la finalisation d'un modèle incomplet

- **Ouvrir** Edu'modèles algorithmique multi-agents en ligne, puis **charger** le modèle incomplet (dans votre répertoire classe).

Dans le modèle, chaque entité est définie par sa mobilité et sa demi-vie. La demi-vie d'une entité est la durée au bout de laquelle la moitié de la population de cette entité a disparu.

Les unités de temps exprimant les durées sont arbitraires. On parlera de « tours » sous Edu'Modèles.

Voici le résumé du modèle incomplet.

Entités à déclarer :

A1A1 : Probabilité de déplacement = 100 %, Demi-vie = 100

A1A2 : Probabilité de déplacement = 100 %, Demi-vie = 100

A2A2 : Probabilité de déplacement = 100 %, Demi-vie = 100

Comportements à entrer :

Modifier une règle																												
<p>Nom de la règle : <input type="text" value="repro (A1/A1) avec (A1/A1)"/></p> <p>Type : <input checked="" type="checkbox"/> Réaction (rencontre entre plusieurs agents)</p> <p>Age minimal des réactifs (en nombre de tours) : <input type="text" value="0"/></p> <p>Probabilité de réaction à chaque tour (en %) : <input type="text" value="10"/></p> <p>Conditionner cette règle à l'effectif d'un agent : <input type="checkbox"/></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Réactifs</th> <th></th> <th>Produits</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(A1/A1)</td> <td><input type="checkbox"/></td> <td>(A1/A1)</td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>(A1/A1)</td> <td><input type="checkbox"/></td> <td>(A1/A1)</td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>----</td> <td><input type="checkbox"/></td> <td>(A1/A1)</td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>----</td> <td><input type="checkbox"/></td> <td>(A1/A1)</td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>----</td> <td><input type="checkbox"/></td> <td>----</td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> </tbody> </table> <p>Le premier réactif doit forcément être au centre de la réaction : <input type="checkbox"/></p>				Réactifs		Produits		(A1/A1)	<input type="checkbox"/>	----	<input type="checkbox"/>	(A1/A1)	<input type="checkbox"/>	----	<input type="checkbox"/>	(A1/A1)	<input type="checkbox"/>	----	<input type="checkbox"/>	----	<input type="checkbox"/>	<p>Une équation de comportement s'écrit comme une réaction chimique : les réactifs en amont et les produits en aval.</p> <p>A1A1avecA1A1 : A1A1 + A1A1 =10=>A1A1 + A1A1 + A1A1 + A1A1</p> <p>A1A1avecA1A2 : A1A1 + A1A2 =10=>A1A2 + A1A1 + A1A2 + A1A1</p> <p>A1A2avecA1A2 : A1A2 + A1A2 =10=>A1A1 + A2A2 + A1A2 + A1A2</p> <p>Ne pas donner une probabilité trop forte aux comportement de reproduction : éviter les valeurs supérieures à 10 %.</p>						
Réactifs		Produits																										
(A1/A1)	<input type="checkbox"/>	(A1/A1)	<input type="checkbox"/>																									
(A1/A1)	<input type="checkbox"/>	(A1/A1)	<input type="checkbox"/>																									
----	<input type="checkbox"/>	(A1/A1)	<input type="checkbox"/>																									
----	<input type="checkbox"/>	(A1/A1)	<input type="checkbox"/>																									
----	<input type="checkbox"/>	----	<input type="checkbox"/>																									

- **Rajouter** les trois équations manquantes en vous appuyant sur le travail préparatoire et le copie d'écran ci-dessus.

Quelques indications pour la création du modèle

- Pour éviter l'encombrement rapide de l'environnement par de trop nombreux agents, **paramétrier** un environnement de 100 x 100 soit 10 000 pixels
- **Laisser** un écoulement de temps suffisamment long pour simuler une durée représentative de plusieurs générations (par exemple, 600 tours).
- **Penser** ensuite à placer chaque agent aléatoirement sur la grille (entre 150 et 300 agents par génotype).

Test du modèle numérique et sa confrontation au modèle théorique

Il s'agit désormais de le faire fonctionner.

Les effectifs des différents génotypes, calculés par le modèle à tout moment de la simulation, seront ensuite traités avec un tableur afin d'obtenir les fréquences alléliques.

Sous Edu'Modèles on peut enregistrer les valeurs du graphique sous la forme d'un fichier CSV (Graphique → Exporter) puis les traiter avec un tableur-grapheur pour le calcul des fréquences alléliques.

Pour ouvrir le fichier csv sous office 365 -> Ouvrir Excel -> Données -> Obtenir des données -> fichier texte

Calcul de la fréquence théorique.

Le calcul des fréquences des allèles A et B se fait en utilisant les fréquences observées des génotypes et en utilisant la formule suivante.

$F_{(A1)} = (n_{(A1/A1)} + \frac{1}{2} n_{(A1/A2)})/N$ avec n = nombre d'individus du génotype considéré et N effectif global de l'échantillon.

$F_{(A2)} = (n_{(A2/A2)} + \frac{1}{2} n_{(A1/A2)})/N$.

Travail à faire sur tableur.

- **Calculer** les fréquences de chaque allèle. Aide pour le calcul et les arrondis au tableau.
- **Réaliser** le graphique montrant l'évolution des fréquences alléliques au cours des générations.

Activité d'après Anne Florimond SVT Versailles